.....

$0 < u_{n+1} \leq u_n e^{-\frac{1}{4n}}$

En multiliant ces encadrement, a termes strictement positifs, puis en simplifiant on obtient $0 < u_{n+1} \leq u_1 e^{-\frac{1}{4\times1}} e^{-\frac{1}{4\times2}} e^{-\frac{1}{4\times3}} \ldots e^{-\frac{1}{4n}}$

$$\Rightarrow u_{n+1} \leq u_1 e^{-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)}.$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} \leq u_1 e^{-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}.$$

3/ $\text{Log}(n+1) - \text{Log}(n) \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{4n^2}$ d'après (1)

$\text{Log}(n) - \text{Log}(n-1) \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{4(n-1)^2}$

$\text{Log}(n-1) - \text{Log}(n-2) \leq \frac{1}{n-2} - \frac{1}{4(n-2)^2}$

.....

.....

.....

$\text{Log}(1+1) - \text{Log}(1) \leq \frac{1}{1} - \frac{1}{4(1)^2}$

En sommant ces inégalités puis en simplifiant on obtient

$$\text{Log}(n+1)\text{-Log}(1) \leq \frac{1}{n}+\frac{1}{n\text{-}1}+\ldots+\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n\text{-}1)^2}+\ldots+\frac{1}{1^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \text{Log}(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}.$$

☒ $-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \leq 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

Or on vient de prouver que $\text{Log}(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$.

$$\Rightarrow \text{Log}(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4}\text{Log}(n+1) \geq -\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

$$\Leftrightarrow e^{-\frac{1}{4}\text{Log}(n+1)} \geq e^{-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}$$

$$\Leftrightarrow u_1 e^{-\frac{1}{4}\text{Log}(n+1)} \geq u_1 e^{-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}$$

Or $u_{n+1} \leq u_1 e^{-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}$ d'où $u_{n+1} \leq u_1 e^{-\frac{1}{4}\text{Log}(n+1)}$.

4/ $u_{n+1} \leq u_1 e^{-\frac{1}{4}\text{Log}(n+1)}; \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow u_n \leq u_1 e^{-\frac{1}{4}\text{Log}(n)}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*; 0 < u_n \leq u_1 e^{-\frac{1}{4}\text{Log}(n)}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left[u_1 e^{-\frac{1}{4}\text{Log}(n)}\right] = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0.$